به نام زندگی

توابع احتمال متغیرهای تصادفی

- تابع توزیع احتمال PDF

$F_X(x) = P_r\{X \leq x\}$

- تابع چگالی احتمال pdf

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$\Rightarrow \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

$$, \quad P_r\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\, dx, \qquad A \subseteq \mathbb{R}$$

۲ برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابع جرم احتمال pmf را
به صورت زیر می‌شناسیم

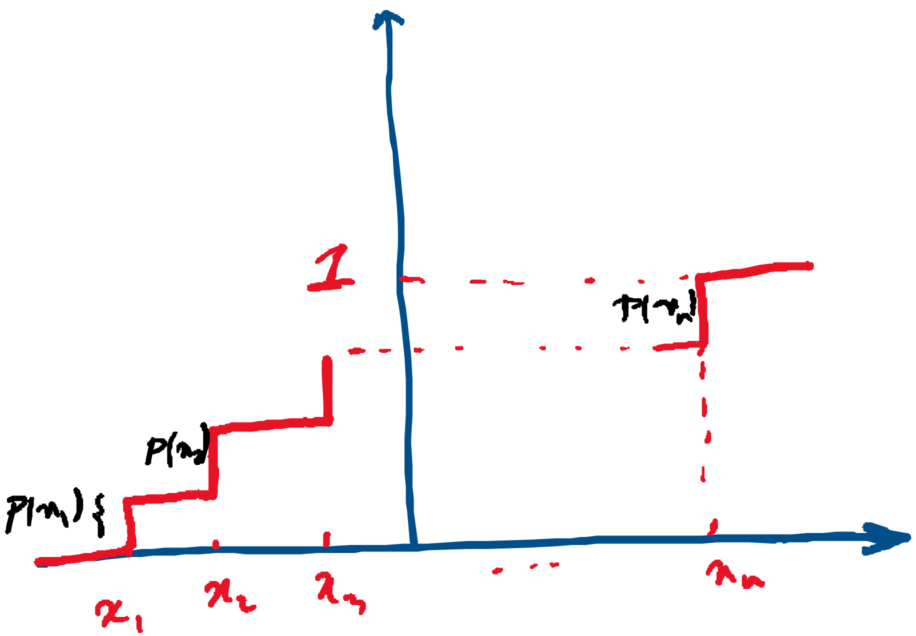
$$P_X(x) = P_r\{X = x\}$$

$$x \in X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$$

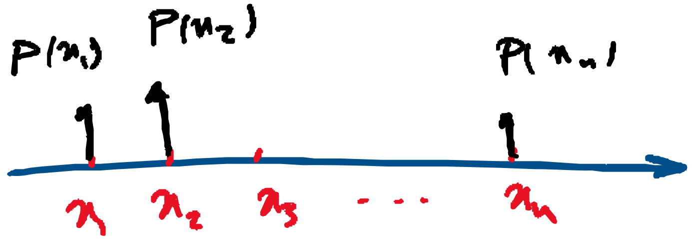
در ادامه برای متغیرهای تصادفی گسسته، تابع جرم احتمال مشابه تابع چگالی احتمال کار می‌کند
داریم

$$f_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\,\delta(x - x_i)$$

همان طور که می دانیم ، تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ برای متغیرهای تصادفی گسسته، فرم پلکانی دارد



$$\xrightarrow[f_X(x)]{\frac{d}{dx} F_X(x)}$$



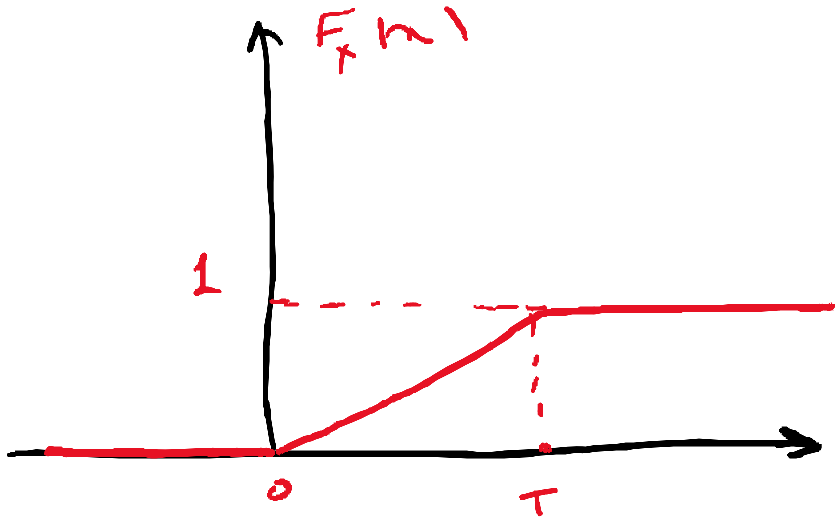
$$F_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\, u(x - x_i)$$

$$f_X(x) = \sum_{x_i} P_X(x_i)\, \delta(x - x_i)$$

$\Leftarrow$ برای متغیرهای تصادفی گسسته با داشتن تابع جرم احتمال pmf ، تو تابع توزیع احتمال و چگالی احتمال را نیز می‌توانیم به دست بیاوریم (خصوصیات آماری متغیر تصادفی را به صورت کامل در اختیار داریم)

مثال: در جلسه‌ی گذشته مثالی از یک متغیر تصادفی بررسی کردیم که نشان دهنده‌ی زمان رخداد یک مکالمه تلفنی در بازه‌ی $[0, T]$ بود. تابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی را به صورت زیر به دست آوردیم.

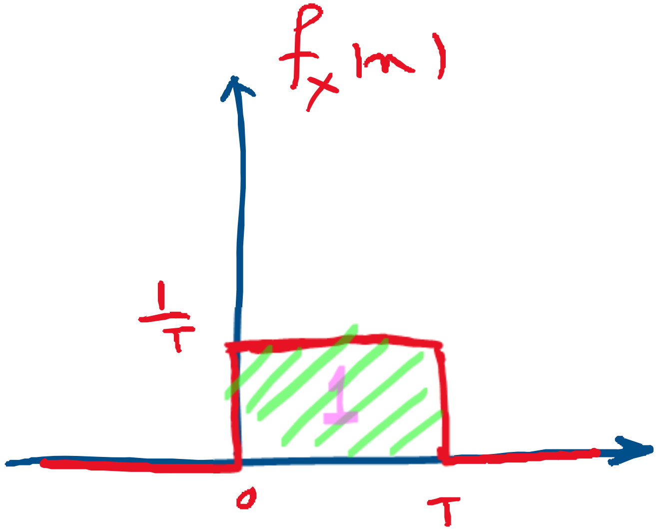
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{T} & 0 \leq x < T \\ 1 & x \geq T \end{cases}$$



تابع چگالی احتمال را برای متغیر تصادفی x به دست بیاورید.

می دانیم که

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \le x \le T \\ 0 & oth. \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

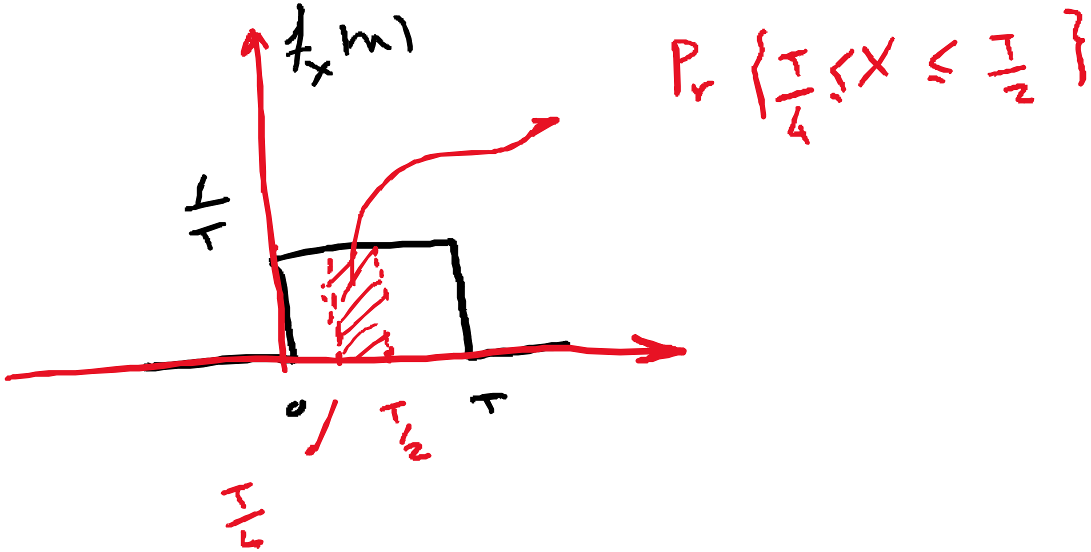
$$\int_{0}^{T} \underbrace{f_X(x)}_{\frac{1}{T}}\,dx = 1$$

* می‌دانیم که با کمک $f_X(x)$ می‌توان احتمال هر پیشامدی در ارتباط با X را به دست آورد.

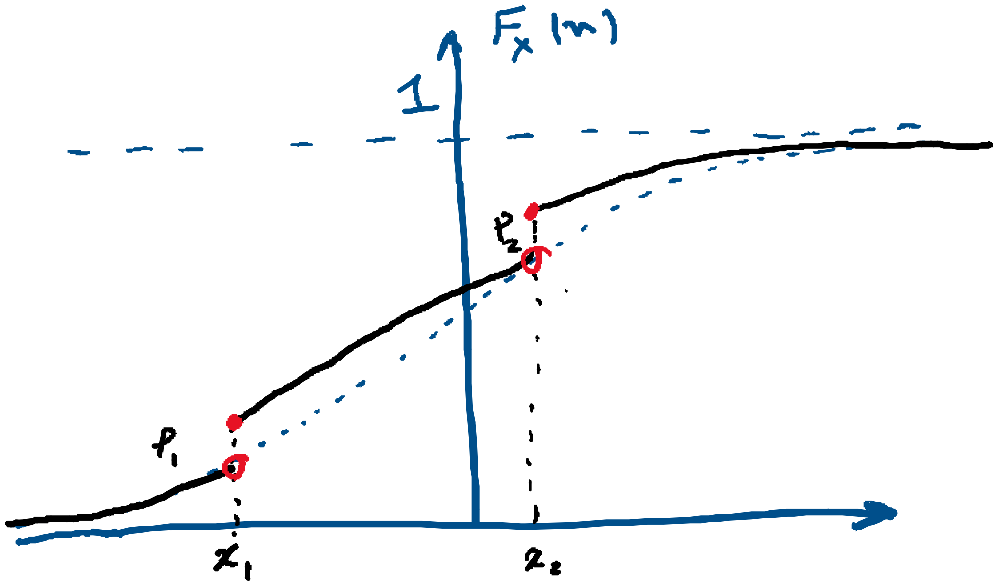
با توجه به این موضوع $P_r\left\{\frac{T}{4} \leq X \leq \frac{T}{2}\right\}$ را به دست بیاورید.

$$P_r\left\{\frac{T}{4} \leq X \leq \frac{T}{2}\right\} = \int_{T/4}^{T/2} f_X(x)\,dx = \int_{T/4}^{T/2} \frac{1}{T}\,dx = \frac{1}{T}\int_{T/4}^{T/2} dx$$

$$\Longrightarrow P_r\left\{\frac{T}{4} \leq X \leq \frac{T}{2}\right\} = \frac{1}{T}\, x \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T}\underbrace{\left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4}\right)}_{T/4} = \frac{1}{4}$$

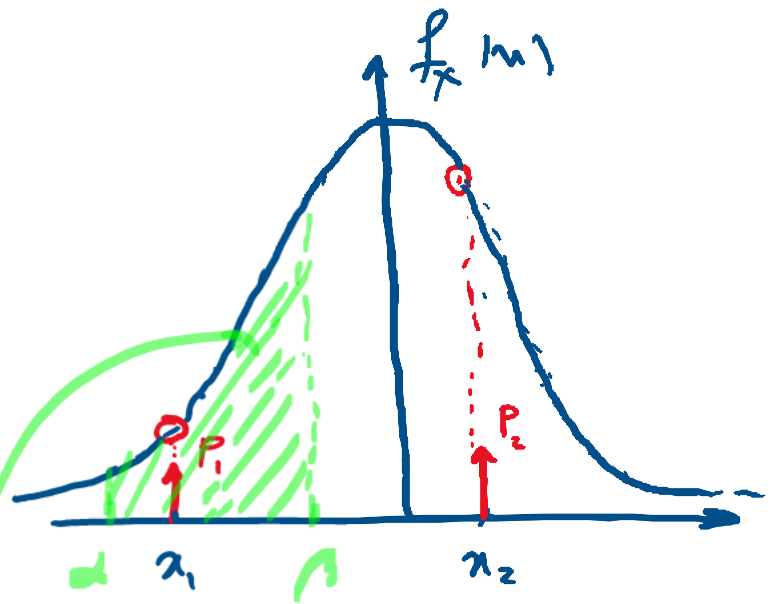


مثال: برای متغیر تصادفی X ، تابع توزیع احتمال $F_X(x)$ را به صورت زیر داریم. تابع چگالی احتمال آن را به دست بیاورید.



$$\xrightarrow[f_X(x)]{\frac{d}{dx} F_X(x)}$$

(متغیر تصادفی ترکیبی)



$$P_r\{X = x_1\} = P_1$$

$$P_r\{X = x_2\} = P_2$$

$$P_r\{X = \alpha\} = 0 \quad , \alpha \neq x_1 , x_2$$

$$P_r\{\alpha \leq X \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)\,dx$$

مثال: فرض کنیم مدت زمان کارکرد یک وسیله الکتریکی قبل از خراب شدن با متغیر تصادفی X نشان داده می‌شود که تابع چگالی احتمال آن به فرم زیر است.

(برحسب روز)

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

می‌خواهیم احتمال پیشامدهای زیر را در ارتباط با این متغیر تصادفی به دست بیاوریم.

A: پیشامد اینکه این وسیله الکتریکی کمتر از 100 روز کار کند.

B: پیشامد اینکه این وسیله الکتریکی بین 50 تا 150 روز کار کند.

$$P_A = \int_0^{100} f_X(x)\,dx = \int_0^{100} \lambda e^{-\frac{x}{100}}\,dx$$

$$P_B = \int_{50}^{150} f_X(x)\,dx = \int_{50}^{150} \lambda e^{-\frac{x}{100}}\,dx$$

برای محاسبه‌ی احتمال پیشامدهای A و B ، لازم است λ را داشته باشیم. برای به دست آوردن λ از خاصیت نرمالیزه بودن توابع چگالی احتمال استفاده می‌کنیم.

می دانیم که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$\Longrightarrow \int_{0}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\frac{x}{100}}\,dx = 1$$

$$\Longrightarrow \lambda \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{100}}\,dx = \lambda \left(-100\, e^{-\frac{x}{100}}\right)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \lambda\left(0-(-100)\right) = 100\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_A = \int_0^{100} f_X(x)\,dx = \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\,dx$$

$$= \frac{1}{100} \left(-100\, e^{-\frac{x}{100}}\right)\Big|_0^{100} = 1 - e^{-1}$$

$$P_B = \int_{50}^{150} f_x(x)\,dx = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}}\,dx$$

$$= \frac{1}{100}\left(-100\, e^{-\frac{x}{100}}\right)\Big|_{50}^{150} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}}\,d\alpha = \int_{0}^{x} \frac{1}{100} e^{-\frac{\alpha}{100}}\,d\alpha$$

$$F_X(x) = \frac{1}{100}\left(-100\, e^{-\alpha/100}\right)\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{\frac{x}{100}}$$

$$P_A = P_r\{0 \leq X \leq 100\} = F_X(100) - F_X(0)$$

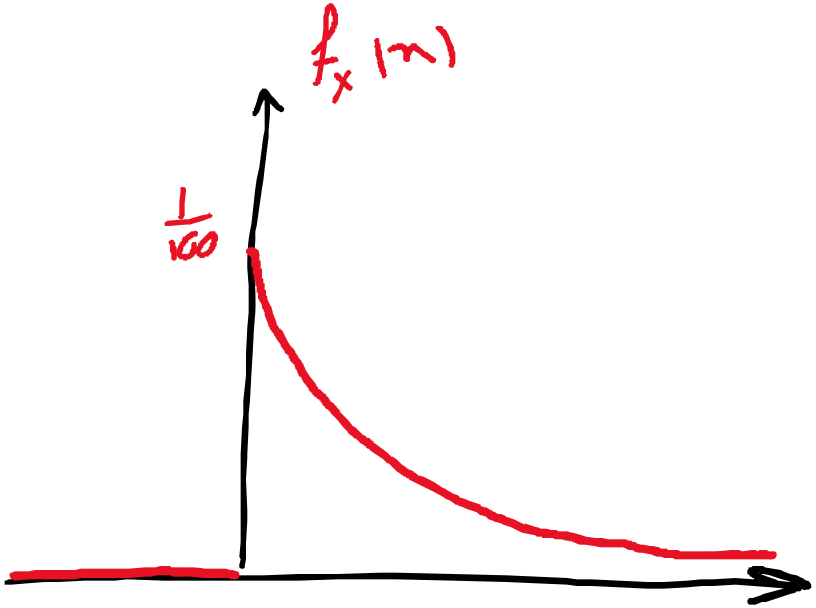
$$= \left(1 - e^{-\frac{100}{100}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{0}{100}}\right) = 1 - e^{-1}$$

$$P_B = P_r\{50 \leq X \leq 150\} = F_X(150) - F_X(50)$$

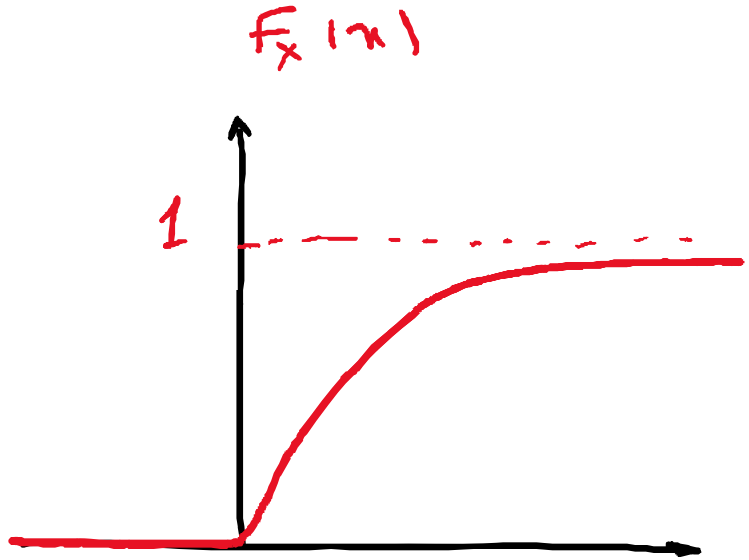
$$= \left(1 - e^{-\frac{150}{100}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{50}{100}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

* به دست آوردن تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی به صورت تجربی یا عددی (هیستوگرام)

در بسیاری از کاربردها در سیستم های عملی یا شبیه سازی سیستم ها یا اندازه گیری ها (نتایج) در ارتباط با یک متغیر تصادفی X، در اختیار داریم و می خواهیم تابع چگالی احتمال آن را به صورت تجربی یا عددی به دست بیاوریم و خصوصیات آماری متغیر تصادفی را بررسی کنیم. برای این منظور با توجه به تعریف تابع چگالی احتمال، می توان به صورت زیر عمل کرد.

از تعریف مشتق

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) \overset{1}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

اگر Δx به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، می‌توان تقریب زیر را در نظر گرفت.

$$f_X(x) \simeq \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \frac{P_r\{x \leq X \leq x+\Delta x\}}{\Delta x}$$

یا

$$P_r\{x \leq X \leq x+\Delta x\} \simeq f_X(x)\,\Delta x$$

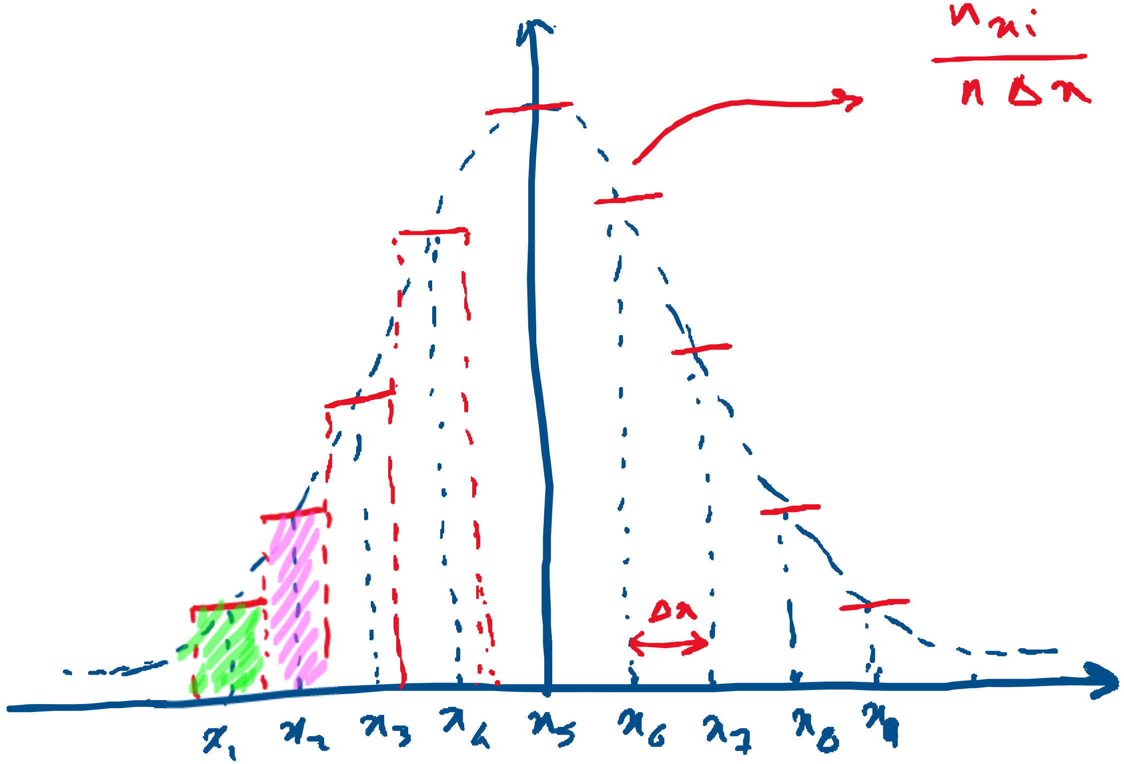
$\Leftarrow$ برای به دست آوردن $f_X(x)$ به صورت تجربی، می‌توانیم با انتخاب Δx به اندازه‌ی کافی کوچک و در اختیار داشتن احتمال پیش‌آمدهای به فرم $\{x_i \leq X \leq x_i+\Delta x\}$

براساس اندازه‌گیری‌ها، $f_X(x)$ را برای هر نقطه‌ی x_i به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$f_X(x_i) \cong \frac{P_r\{x_i \leq X \leq x_i + \Delta x\}}{\Delta x} \cong \frac{\frac{n_{x_i}}{n}}{\Delta x} = \frac{n_{x_i}}{n \Delta x}$$

که در آن n تعداد کل آزمایش‌ها یا مشاهدات یا اندازه‌گیری‌ها

n_{x_i} تعداد حالت‌هایی است که به ازای آن داریم $\{x_i \leq X \leq x_i + \Delta x\}$



$\frac{n_{x_i}}{n\,\Delta x}$
Δx
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
x_9

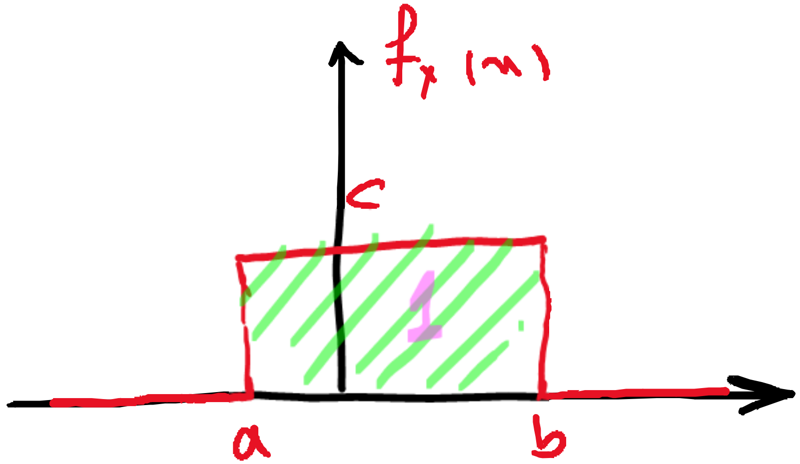
* معرفی متغیرهای تصادفی پرکاربرد

در این بخش می‌خواهیم متغیرهای تصادفی پرکاربرد در مهندسی را معرفی کنیم و توابع احتمال آن‌ها را بررسی کنیم. متغیرهای تصادفی را به دو دسته کلی متغیرهای تصادفی پیوسته و گسسته، تقسیم‌بندی می‌کنیم و از متغیرهای تصادفی پیوسته شروع می‌کنیم و تابع چگالی احتمال آنها را معرفی می‌کنیم. سپس به سراغ متغیرهای تصادفی گسسته می‌رویم و تابع جرم احتمال آنها را معرفی می‌کنیم.

الف) شالهای از متغیرهای تصادفی پیوسته پرکاربرد

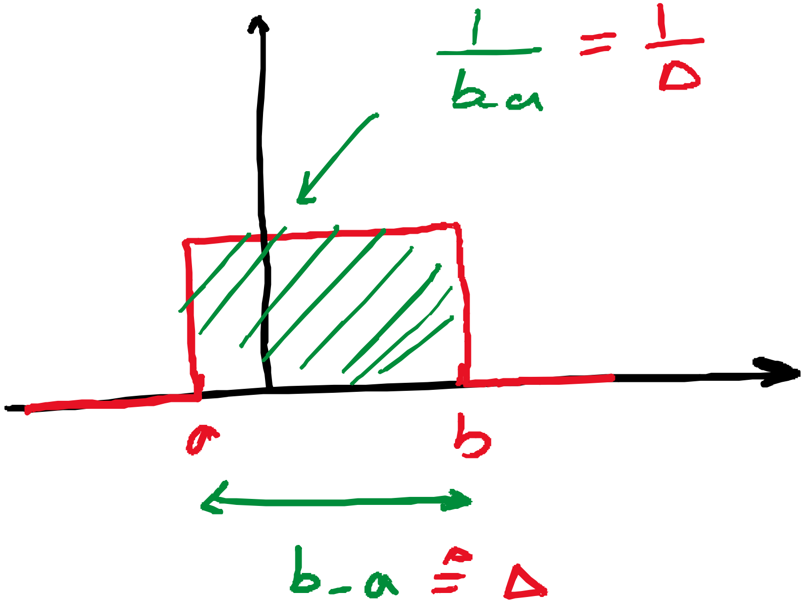
۱- متغیر تصادفی یکنواخت Uniform

متغیر تصادفی یکنواخت X، متغیری است که مقادیری در بازه‌ی [a, b] اختیار می‌کند و تابع چگالی احتمال آن در این بازه ثابت (یکنواخت) است.



$$f_X(x) = \begin{cases} \text{Constant} \equiv c & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{oth.} \end{cases}$$

با توجه به نرمالیزه بودن تابع چگالی احتمال می‌توانیم مقدار ثابت را به دست بیاوریم.



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\Delta} & a \le x \le b \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$X \sim \text{Uniform}(a,b)$$

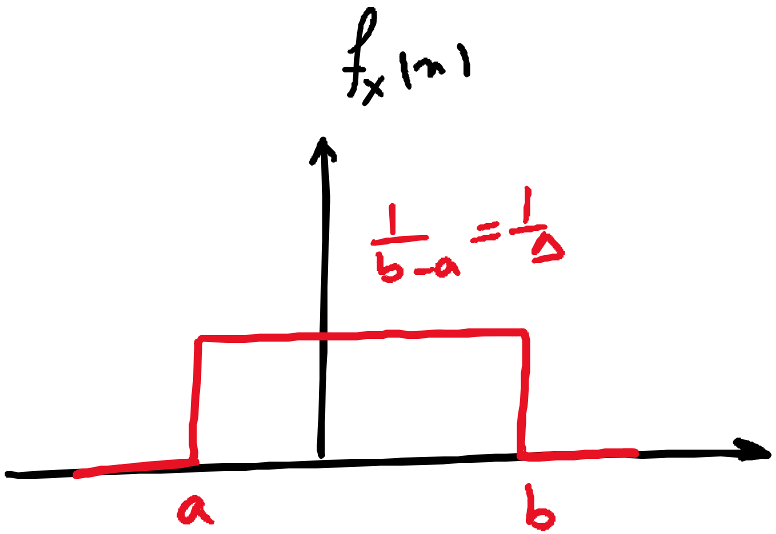
یا

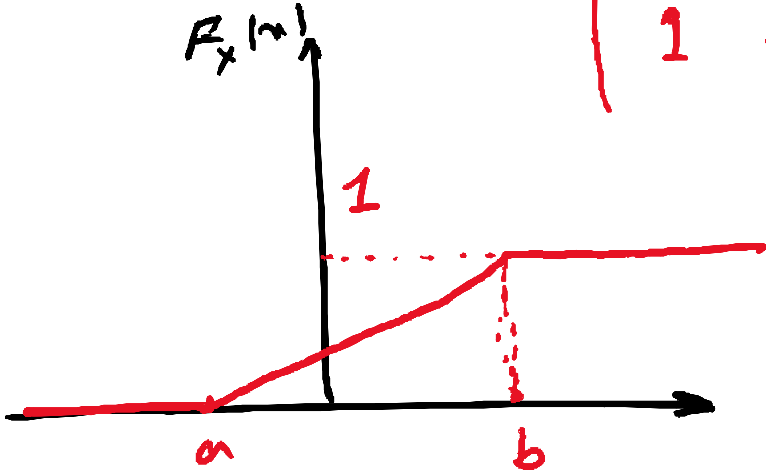
$$X \sim U(a,b)$$

تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی یکنواخت X به صورت زیر است،

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\,d\alpha = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,d\alpha = \frac{1}{b-a}\,\alpha\Big|_{a}^{x}$$

$$= \frac{x-a}{b-a} = \begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{\Delta} & a\leq x\leq b \\ 1 & x\geq b \end{cases}$$





۲- متغیر تصادفی نرمال / گوسی Normal /Gaussian

متغیر تصادفی نرمال / گوسی یکی از پرکاربردترین متغیرهای تصادفی پیوسته در پیش‌بینی است زیرا بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان به صورت یک متغیر تصادفی نرمال مدل سازی کرد. همچنین متغیر تصادفی گوسی ویژگی‌هایی دارد که کاربردهای آن را زیاد می‌کند. به عنوان مثال براساس قضیه‌ی حد مرکزی حاصلجمع تعداد زیادی متغیر تصادفی مستقل را می‌توان به صورت یک متغیر تصادفی نرمال مدل سازی کرد. از این جهت بسیاری از نویزها و تداخل‌ها در سیستم‌های الکترونیکی به صورت متغیر تصادفی نرمال یا

گوسی در نظر گرفته می‌شوند. با اینکه می‌توان به خصوصیت پایداری در متغیرهای تصادفی نرمال اشاره کرد که بر اساس آن حاصل جمع چند متغیر تصادفی نرمال مستقل خود یک متغیر تصادفی نرمال خواهد بود.

متغیر تصادفی گوسی یا نرمال با دو پارامتر m , σ^2 شناخته می‌شود

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

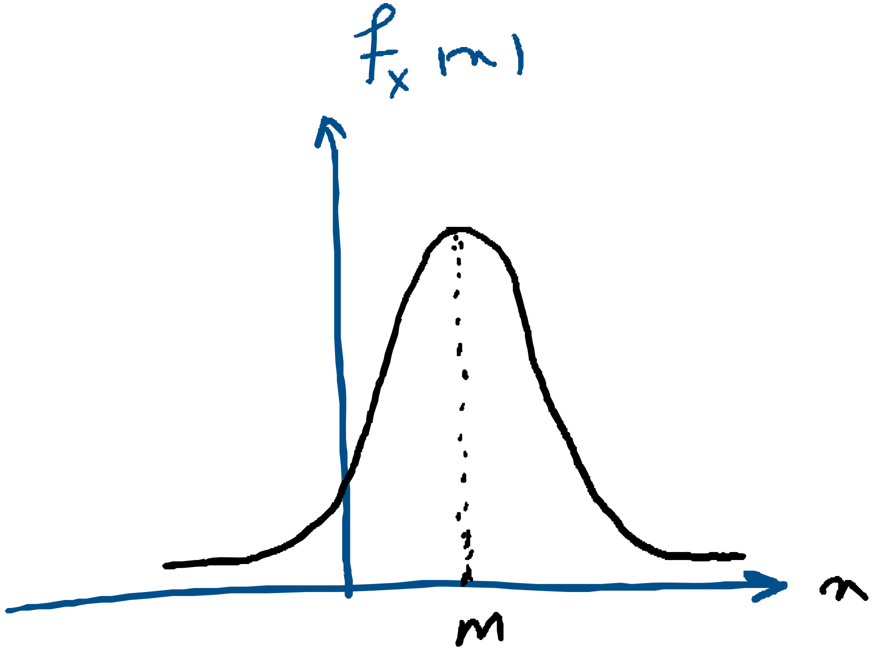
یا $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

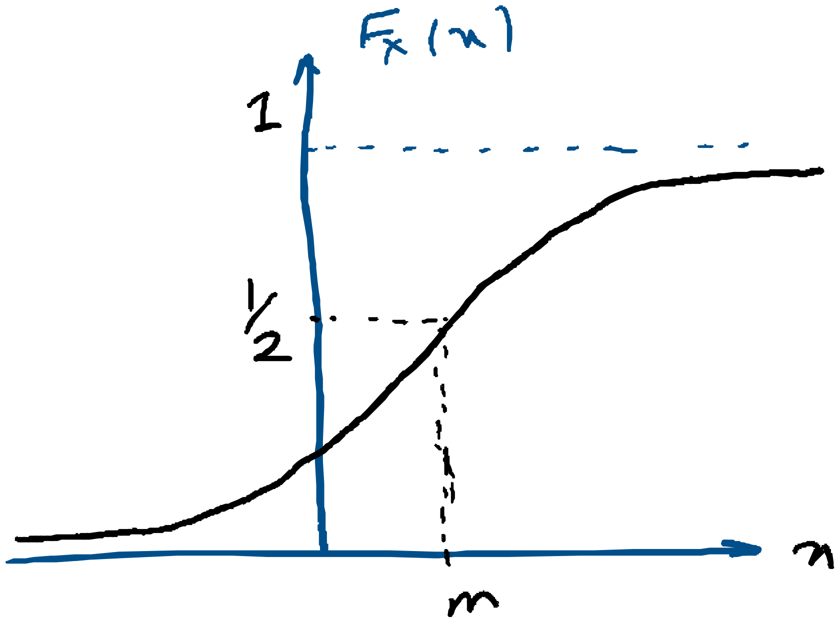
پارامتر m ، میانگین متغیر تصادفی نرمال X است.

پارامتر σ^2 ، واریانس متغیر تصادفی نرمال X است.

به جذر واریانس (یعنی σ) انحراف معیار متغیر تصادفی نرمال X می گوییم.

(نشان دهنده ی میزان انحراف متغیر تصادفی X از مقدار میانگین خودش است)



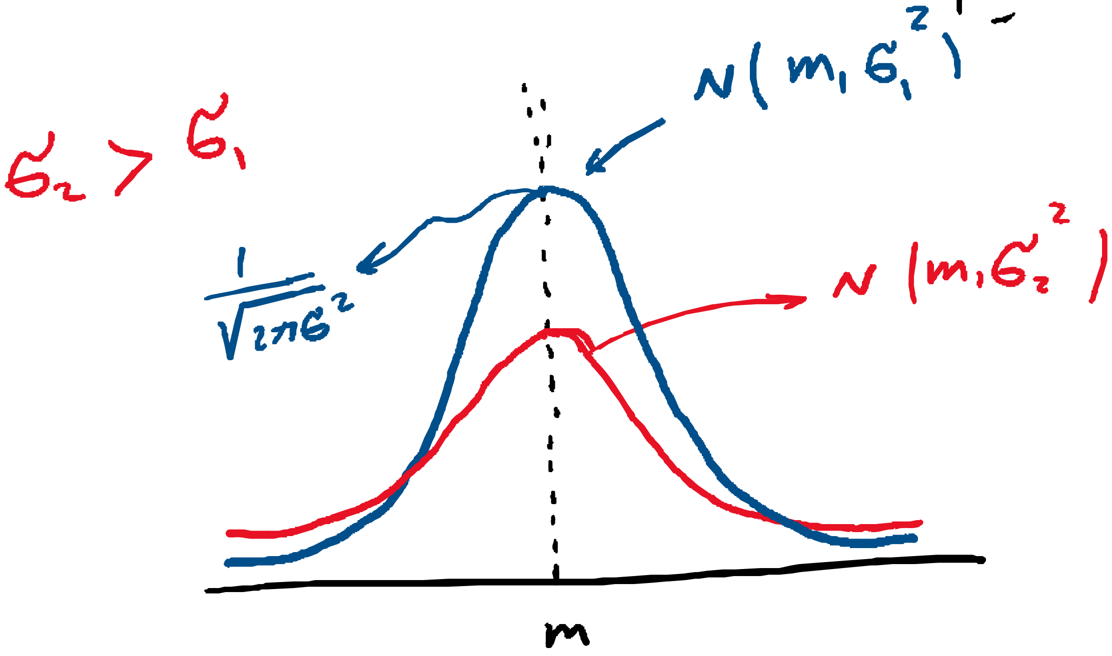


$f_X(x)$ حول نقطه $x=m$ تقارن
زوج دارد

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\alpha)\, d\alpha$$

با توجه به اینکه انحراف از معیار متغیر تصادفی X ، نشان دهنده‌ی میزان انحراف X از مقدار میانگین خودش است، می‌توانیم مقایسه‌ی زیر را برای مقادیر مختلف σ برای تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نرمال داشته باشیم



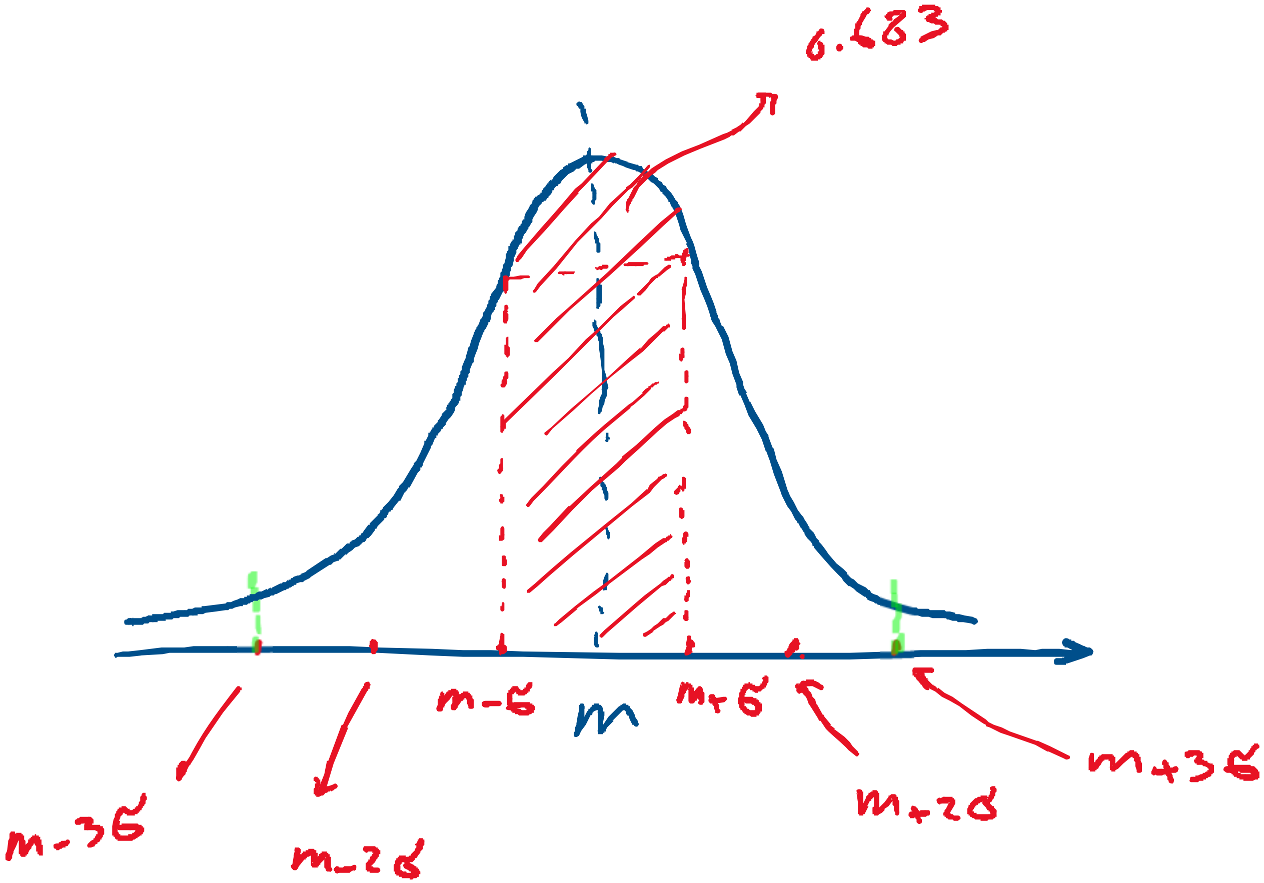
هر چه انحراف از معیار کمتر باشد، گستردگی متغیر تصادفی X حول مقدار میانگین خودش کمتر است و در نتیجه نمودار $f_X(x)$ بلندتر و باریک‌تر خواهد بود.

در مورد متغیر تصادفی نرمال یا گوسی احتمال چند پیشامد زیر، دارای اهمیت ویژه است.

$$P_r\{m-\sigma \leq X \leq m+\sigma\} = 0.683 = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f_X(x)\,dx$$

$$P_r\{m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma\} = 0.954$$

$$P_r\{m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma\} = 0.997$$



0.683
m−σ
m
m+σ
m−3σ
m−2σ
m+2σ
m+3σ